

# 中空ねじりせん断試験の原理

豊田 浩史†

## 概要

中空ねじりせん断試験では複雑な応力とひずみの状態を再現できる一方で、ある軸方向で応力およびひずみの分布が様にならないなど難解な問題も抱えている。要素試験であるため、これらの応力とひずみを如何に平均化するのかにつきると思うが、いまだ統一された方法が取られていないのが現状である。そこで、ここに筆者がもっとも妥当であると考えた応力とひずみの算定方法について示した。どの方法でも違いは微少であるが、今後の研究室での実験においては、この方法に準ずることを推奨する。



## 1 円柱座標系における基本方程式

中空供試体の応力とひずみを考えるとき、円柱座標系を使うと便利である。供試体鉛直軸方向を  $z$ 、円周方向を  $\theta$ 、半径方向を  $r$  とすると、中空供試体の微小要素に働く応力は

$$\sigma_z, \sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_{zr}, \sigma_{r\theta}, \sigma_{z\theta}$$

となり、ひずみは

$$\varepsilon_z, \varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \varepsilon_{zr}, \varepsilon_{r\theta}, \varepsilon_{z\theta}$$

である。次の円柱座標系における弾性体の基本方程式(応力の平衡, 変位-ひずみ, 応力-ひずみ)を示しておく。詳細は他書に譲るが、一般の連続体力学では伸張を正とするが、土質力学では圧縮を正とすることに注意が必要である。

### ● 応力の平衡方程式

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + 2 \frac{\sigma_{r\theta}}{r} + \frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial z} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{zr}}{r} = 0 \quad (3)$$

### ● 変位-ひずみ関係式

$$\varepsilon_z = -\frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (4)$$

$$\varepsilon_r = -\frac{\partial u_r}{\partial r} \quad (5)$$

$$\varepsilon_\theta = -\frac{u_r}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \quad (6)$$

$$\varepsilon_{zr} = -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \quad (7)$$

$$\varepsilon_{r\theta} = -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) \quad (8)$$

$$\varepsilon_{z\theta} = -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right) \quad (9)$$

### ● 応力-ひずみ関係式(構成式)

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} \{ \sigma_z - \nu(\sigma_r + \sigma_\theta) \} \quad (10)$$

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E} \{ \sigma_r - \nu(\sigma_\theta + \sigma_z) \} \quad (11)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{E} \{ \sigma_\theta - \nu(\sigma_z + \sigma_r) \} \quad (12)$$

$$\varepsilon_{zr} = \frac{1}{2G} \sigma_{zr} \quad (13)$$

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2G} \sigma_{r\theta} \quad (14)$$

$$\varepsilon_{z\theta} = \frac{1}{2G} \sigma_{z\theta} \quad (15)$$

\*研究室ゼミ

†長岡技術科学大学 環境・建設系

## 2 中空供試体の応力と変位の仮定

以下に中空供試体の応力と変位の仮定を示しておく。ここで述べている“独立である”とはその軸方向に変化しない、つまり一様な分布であるということである。

### ● 応力の仮定

1.  $\sigma_z$  は  $z, r, \theta$  と独立である.
2.  $\sigma_\theta$  は  $z, \theta$  と独立である.
3.  $\sigma_{z\theta}$  は  $z, \theta$  と独立である.
4.  $\sigma_{z\theta}$  は弾性分布と完全塑性分布と仮定した場合の平均値とする.
5.  $\sigma_{zr}, \sigma_{r\theta}$  は発生しない.

### ● 変位の仮定

1.  $u_z$  は  $r, \theta$  と独立である.
2.  $u_r$  は  $z, \theta$  と独立である.
3.  $u_r$  は  $r$  軸方向に線形に変化する.
4.  $u_\theta$  は  $\theta$  と独立である.
5.  $u_\theta$  は  $z, r$  方向に線形に変化する.

## 3 応力の解析

供試体に作用する鉛直力を  $F_v$ 、ねじり力を  $T$ 、外圧、内圧をそれぞれ  $p_o$ 、 $p_i$  とする (図 1 参照)。応力は半径方向で平均をとるものとする。平均応力  $\bar{\sigma}_z$ 、 $\bar{\sigma}_r$ 、 $\bar{\sigma}_\theta$ 、 $\bar{\sigma}_{z\theta}$  をそれぞれ中空供試体の応力  $\sigma_z$ 、 $\sigma_r$ 、 $\sigma_\theta$ 、 $\sigma_{z\theta}$  とする。

### 3.1 鉛直応力 $\sigma_z$

応力の仮定 1 より  $\sigma_z = \text{const.}$  となり、水中ロードセルの読みを  $F_v$ 、供試体断面積を  $A$  とすると次式のようになる。

$$\bar{\sigma}_z = \frac{F_v + \pi(p_o r_o^2 - p_i r_i^2)}{A} \quad (16)$$

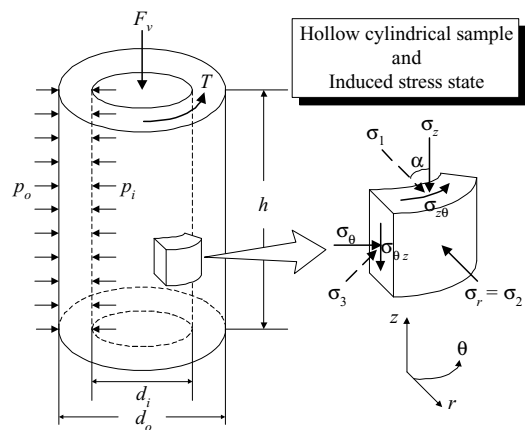


図 1: 中空供試体の外力と応力

### 3.2 半径方向応力 $\sigma_r$ と円周方向応力 $\sigma_\theta$

式 (11), (12) を式 (4), (5), (6), (10) を使って、応力-変位関係に書き換えてみると、

$$\sigma_r = -(\lambda + 2G) \frac{\partial u_r}{\partial r} - \lambda \left( \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) \quad (17)$$

$$\sigma_\theta = -\lambda \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) - (\lambda + 2G) \frac{u_r}{r} \quad (18)$$

ここに

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (19)$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (20)$$

である。

式 (17), (18) を式 (1) に代入し、応力の仮定 5 を使うと、

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} = 0 \quad (21)$$

となり、 $r = r_o$  で  $\sigma_r = p_o$ 、 $r = r_i$  で  $\sigma_r = p_i$  なる境界条件と式 (17), (18) を用いてこの微分方程式を解くと、

$$u_r = -\frac{p_o r_o^2 - p_i r_i^2}{2(\lambda + G)(r_o^2 - r_i^2)} r - \frac{(p_o - p_i) r_o^2 r_i^2}{2G(r_o^2 - r_i^2)} \frac{1}{r} \quad (22)$$

式 (22) を式 (17), (18) に代入すると,

$$\sigma_r = \frac{p_o r_o^2 - p_i r_i^2}{(r_o^2 - r_i^2)} - \frac{(p_o - p_i) r_o^2 r_i^2}{(r_o^2 - r_i^2)} \frac{1}{r^2} \quad (23)$$

$$\sigma_\theta = \frac{p_o r_o^2 - p_i r_i^2}{(r_o^2 - r_i^2)} + \frac{(p_o - p_i) r_o^2 r_i^2}{(r_o^2 - r_i^2)} \frac{1}{r^2} \quad (24)$$

式 (23) と (24) を半径方向に平均をとると,

$$\bar{\sigma}_r = \frac{1}{r_o - r_i} \int_{r_i}^{r_o} \sigma_r dr = \frac{p_o r_o + p_i r_i}{r_o + r_i} \quad (25)$$

$$\bar{\sigma}_\theta = \frac{1}{r_o - r_i} \int_{r_i}^{r_o} \sigma_\theta dr = \frac{p_o r_o - p_i r_i}{r_o - r_i} \quad (26)$$

### 3.3 せん断応力 $\sigma_{z\theta}$

$T$  を供試体上端面に作用するトルクとし, 応力の仮定 3 を用いると,

$$T = \int_{r_i}^{r_o} \int_0^{2\pi} \sigma_{z\theta} r^2 d\theta dr = 2\pi \int_{r_i}^{r_o} \sigma_{z\theta} r^2 dr \quad (27)$$

応力の仮定 4 に示したとおりせん断応力には, 半径方向に弾性分布および塑性分布を仮定し (図 2 参照), 双方の算術平均値をあてる.

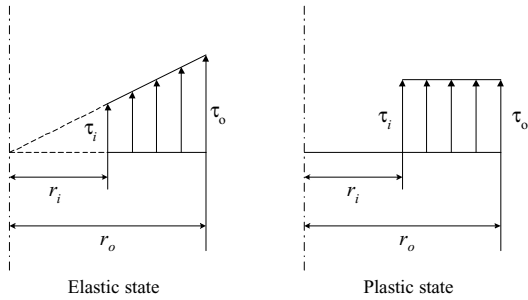


図 2: 中空供試体のせん断応力分布

#### 1. 弾性分布

せん断応力は次のようにおくことができる.

$$\sigma_{z\theta} = \xi r \quad (28)$$

これを式 (27) に代入すれば,

$$T = 2\pi \xi \int_{r_i}^{r_o} r^3 dr = \frac{\pi}{2} (r_o^4 - r_i^4) \xi \quad (29)$$

したがって

$$\xi = \frac{2T}{\pi(r_o^4 - r_i^4)} \quad (30)$$

平均せん断応力を平均半径でのせん断応力として,

$$\bar{\sigma}_{z\theta} = \xi \frac{r_o + r_i}{2} = \frac{T}{\pi(r_o^2 + r_i^2)(r_o - r_i)} \quad (31)$$

#### 2. 完全塑性分布

せん断応力は次のようにおくことができる.

$$\sigma_{z\theta} = \text{const.} \quad (32)$$

これを式 (27) に代入すれば,

$$T = 2\pi \sigma_{z\theta} \int_{r_i}^{r_o} r^2 dr = \frac{2}{3} \pi \sigma_{z\theta} (r_o^3 - r_i^3) \xi \quad (33)$$

したがって

$$\bar{\sigma}_{z\theta} = \frac{3T}{2\pi(r_o^3 - r_i^3)} \quad (34)$$

実際の供試体は弾性体と完全塑性体の中間的な挙動を示すと考えることができるので, 式 (31) と式 (34) の算術平均をとり,

$$\sigma_{z\theta} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{T}{\pi(r_o^2 + r_i^2)(r_o - r_i)} + \frac{3T}{2\pi(r_o^3 - r_i^3)} \right\} \quad (35)$$

とする. ただし, いずれの式を用いても違いは数パーセント程度である.

## 4 ひずみの解析

供試体の体積を  $V$ , 鉛直方向変位を  $\Delta H$ , 供試体の回転角を  $\Delta\theta$ , 外径変位, 内径変位をそれぞれ  $u_o, u_i$  とする. ひずみ分布は供試体内で体積平均をとることにより求める. 体積平均により求められた平均ひずみ  $\bar{\varepsilon}_z, \bar{\varepsilon}_r, \bar{\varepsilon}_\theta, \bar{\varepsilon}_{z\theta}$  をそれぞれ中空供試体のひずみ  $\varepsilon_z, \varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \varepsilon_{z\theta}$  とする.

4.1 鉛直ひずみ  $\varepsilon_z$ 

式 (4) より

$$\int_0^H \varepsilon_z dz = \int_0^H -\frac{\partial u_z}{\partial z} dz = \Delta H \quad (36)$$

となるので、体積平均をとると、

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_z &= \frac{\int_V \varepsilon_z dV}{V} = \frac{\int_0^H \int_0^{2\pi} \int_{r_i}^{r_o} \varepsilon_z r dr d\theta dz}{V} \\ &= \frac{\int_0^H \varepsilon_z dz \int_0^{2\pi} \int_{r_i}^{r_o} r dr d\theta}{V} \\ &= \frac{\Delta H}{H} \end{aligned} \quad (37)$$

4.2 半径方向ひずみ  $\varepsilon_r$  と円周方向ひずみ

$\varepsilon_\theta$

$\varepsilon_r$  は変位の仮定 3 より次式のようになる。

$$u_r = \frac{r_o u_i - r_i u_o}{r_o - r_i} + \frac{u_o - u_i}{r_o - r_i} r \quad (38)$$

式 (5) より、

$$\varepsilon_r = -\frac{u_o - u_i}{r_o - r_i} \quad (39)$$

体積平均をとると、

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_r &= \frac{\int_V \varepsilon_r dV}{V} = \frac{\int_0^H \int_0^{2\pi} \int_{r_i}^{r_o} \varepsilon_r r dr d\theta dz}{V} \\ &= \frac{\varepsilon_r \int_0^H \int_0^{2\pi} \int_{r_i}^{r_o} r dr d\theta dz}{V} \\ &= -\frac{u_o - u_i}{r_o - r_i} \end{aligned} \quad (40)$$

$\varepsilon_\theta$  は変位の仮定 2 と式 (6) より

$$\varepsilon_\theta = -\frac{u_r}{r} \quad (41)$$

体積平均をとると、

$$\bar{\varepsilon}_\theta = \frac{\int_V \varepsilon_\theta dV}{V} = \frac{\int_0^H \int_0^{2\pi} \int_{r_i}^{r_o} \varepsilon_\theta r dr d\theta dz}{V}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\int_0^H \int_0^{2\pi} \int_{r_i}^{r_o} -u_r dr d\theta dz}{V} \\ &= -\frac{u_o + u_i}{r_o + r_i} \end{aligned} \quad (42)$$

4.3 せん断ひずみ  $\varepsilon_{z\theta}$  ( $= 1/2 \gamma$ )

変位の仮定 1, 5 と式 (9) より

$$\varepsilon_{z\theta} = -\frac{1}{2} \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \quad (43)$$

$$\int_0^H -\frac{\partial u_\theta}{\partial z} dz = r \Delta \theta \quad (44)$$

体積平均をとると、

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_{z\theta} &= \frac{\int_V \varepsilon_{z\theta} dV}{V} = \frac{\int_0^H \int_0^{2\pi} \int_{r_i}^{r_o} \varepsilon_{z\theta} r dr d\theta dz}{V} \\ &= \frac{\int_{r_i}^{r_o} r \int_0^H \varepsilon_{z\theta} dz dr \int_0^{2\pi} d\theta}{V} \\ &= \frac{\Delta \theta (r_o^3 - r_i^3)}{3H(r_o^2 - r_i^2)} \end{aligned} \quad (45)$$

## 5 主応力と主ひずみ

応力の仮定 5 より  $\sigma_r$  は常に主応力となる。  $\sigma_r$  は最大主応力、中間主応力、最小主応力のいずれにもなりうるが、一般的には  $\sigma_r$  を中間主応力とする。したがって最大主応力と最小主応力は  $z - \theta$  面内の直交する 2 方向であり、自由に回転できる。図 3 のモールの応力円を参照して中空供試体の主応力  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  は次のように表される。

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_z + \sigma_\theta}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_z - \sigma_\theta}{2}\right)^2 + \sigma_{z\theta}^2} \quad (46)$$

$$\sigma_2 = \sigma_r \quad (47)$$

$$\sigma_3 = \frac{\sigma_z + \sigma_\theta}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_z - \sigma_\theta}{2}\right)^2 + \sigma_{z\theta}^2} \quad (48)$$

また最大主応力  $\sigma_1$  が鉛直方向からなす角度  $\alpha$  は

$$\tan 2\alpha = \frac{2\sigma_{z\theta}}{\sigma_z - \sigma_\theta} \quad (49)$$

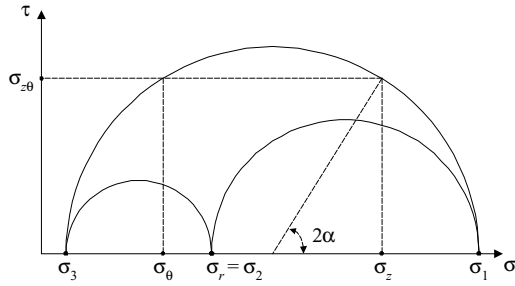


図 3: 中空筒試体のモールの応力円

である。中間主応力係数  $b$  は式 (46), (47), (48) から次のように計算できる。

$$b = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} = \frac{1}{2} \left( \frac{\sigma_r - \frac{\sigma_z + \sigma_\theta}{2}}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_z - \sigma_\theta}{2}\right)^2 + \sigma_{z\theta}^2}} + 1 \right) \quad (50)$$

また内部摩擦角  $\phi$  は次のように計算できる。

$$\phi = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 + \sigma_3} = \frac{2\sqrt{\left(\frac{\sigma_z - \sigma_\theta}{2}\right)^2 + \sigma_{z\theta}^2}}{\sigma_z + \sigma_\theta} \quad (51)$$

主ひずみに関しても主応力と同じく次式のように求められる。

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_z + \varepsilon_\theta}{2} + \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_z - \varepsilon_\theta}{2}\right)^2 + \varepsilon_{z\theta}^2} \quad (52)$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_r \quad (53)$$

$$\varepsilon_3 = \frac{\varepsilon_z + \varepsilon_\theta}{2} - \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_z - \varepsilon_\theta}{2}\right)^2 + \varepsilon_{z\theta}^2} \quad (54)$$

## 6 メンブレン力の補正

中空ねじり試験に対して、大変形時にはメンブレン力は無視できないくらい大きくなるため、外圧、内圧、軸力、トルクに対し補正を行う。メンブレンが厚み方向に平面応力状態にあり、ポアソン比  $\nu = 0.5$  の円筒形の弾性体であると仮定するとそれぞれの補正量は次のようになる。

$$p_{om} = -\frac{2}{3} \frac{E_m t_m}{r_o} (\varepsilon_{zmo} + 2\varepsilon_{\theta mo}) \quad (55)$$

$$p_{im} = \frac{2}{3} \frac{E_m t_m}{r_i} (\varepsilon_{zmi} + 2\varepsilon_{\theta mi}) \quad (56)$$

$$F_{vm} = -\frac{4}{3} \pi E_m t_m \{ (2\varepsilon_{zmo} + \varepsilon_{\theta mo}) r_o + (2\varepsilon_{zmi} + \varepsilon_{\theta mi}) r_i \} \quad (57)$$

$$T_m = -\frac{2}{3} \pi E_m t_m (r_o^2 \gamma_{mo} + r_i^2 \gamma_{mi}) \quad (58)$$

ここに  $t_m$  はメンブレンの厚さ、 $E_m$  はメンブレンのヤング率である。 $\varepsilon_{zmo}$ ,  $\varepsilon_{zmi}$  は外側および内側メンブレンの鉛直方向ひずみ、 $\varepsilon_{\theta mo}$ ,  $\varepsilon_{\theta mi}$  は外側および内側メンブレンの円周方向ひずみ、 $\gamma_{mo}$ ,  $\gamma_{mi}$  は外側および内側メンブレンのせん断ひずみである。ひずみは圧縮を正とする。張力による伸縮がないときの外側および内側メンブレンの高さ、外側および内側メンブレンの半径をそれぞれ  $H_{mo}$ ,  $H_{mi}$ ,  $r_{mo}$ ,  $r_{mi}$  とすれば、次式のようになる。

$$\varepsilon_{zmo} = \frac{H_{mo} - H}{H_{mo}} \quad (59)$$

$$\varepsilon_{zmi} = \frac{H_{mi} - H}{H_{mi}} \quad (60)$$

$$\varepsilon_{\theta mo} = \frac{r_{mo} - r_o}{r_{mo}} \quad (61)$$

$$\varepsilon_{\theta mi} = \frac{r_{mi} - r_i}{r_{mi}} \quad (62)$$

$$\gamma_{mo} = \frac{r_o \Delta\theta}{H_{mo}} \quad (63)$$

$$\gamma_{mi} = \frac{r_i \Delta\theta}{H_{mi}} \quad (64)$$

## 7 応力とひずみの不均一性

### 7.1 はじめに

中空ねじりせん断試験装置は制御可能な応力、ひずみ成分が4成分と他の試験装置に比べて自由度が大きいという利点があるが、一方で中空外圧と中空内圧の圧力差、半径方向のねじり変位差、端面拘束などに起因する応力とひずみの不均一が発生する。この不均一はせん断応力比および供試体の変形が大きくなるほど著しくなる。ここではこの不均一性を簡単に試算してみる。

### 7.2 中空外圧と内圧の差による $\sigma_r$ と $\sigma_\theta$ の不均一

式 (75), (76) より中空外圧と内圧の差は次式のようになる。

$$p_o - p_i = \frac{b - \sin^2 \alpha}{2 \sin \alpha \cos \alpha} \left[ \left( \frac{r_i}{r_o} \right)^2 - \left( \frac{r_o}{r_i} \right)^2 \right] \sigma_{z\theta} \quad (65)$$

$b = \sin^2 \alpha$  であれば応力の不均一は生じず、供試体の内径と外径の比が1に近いほど応力の不均一は小さくなる。また、せん断応力  $\sigma_{z\theta}$  が大きいほど応力の不均一も大きくなる。

### 7.3 ねじり変位差による $\varepsilon_{z\theta}$ と $\sigma_{z\theta}$ の不均一

せん断応力の不均一量と平均せん断応力の比は、式 (28), (31) より次式のようになる。

$$\frac{\sigma_{z\theta}|_{r=r_o} - \sigma_{z\theta}|_{r=r_i}}{\bar{\sigma}_{z\theta}} = 2 \left( \frac{1 - r_i/r_o}{1 + r_i/r_o} \right) \quad (66)$$

せん断ひずみの不均一量と平均せん断ひずみの比は、式 (44), (45) より次式のようになる。

$$\frac{\varepsilon_{z\theta}|_{r=r_o} - \varepsilon_{z\theta}|_{r=r_i}}{\bar{\varepsilon}_{z\theta}} = \frac{3}{2} \frac{(1 - r_i/r_o)\{1 - (r_i/r_o)^2\}}{1 - (r_i/r_o)^3} \quad (67)$$

以上よりせん断応力およびせん断ひずみの不均一は  $r_i/r_o$  が1に近いほど小さくなる。

### 7.4 供試体上下端面拘束による応力とひずみの不均一

供試体の上下端面は拘束されており、水平方向の変形が許されない。すなわち上下端面において  $\varepsilon_r = \varepsilon_\theta = 0$  となっている。このことは  $\varepsilon_r$  や  $\varepsilon_\theta$  の分布の不均一のみならず、端面付近での応力集中に伴う  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$  の不均一や、本来ゼロであるべき応力  $\sigma_{zr}$  やひずみ  $\varepsilon_{zr}$  の発生など複雑な不均一性をもたらす。供試体高さを高くすれば、供試体全体におけるこの影響を小さくすることができる。

## 8 応力とひずみの制御

### 8.1 はじめに

中空ねじりせん断試験では、供試体側面は水圧によって拘束されるため、 $r$  軸に関するせん断応力2成分が0になり、また、土の構造が  $r$  軸方向に均一であることを前提として、供試体が正しく円筒形を保つと仮定されるために  $r$  軸に関するせん断ひずみ2成分も0となる。そこで制御可能な応力とひずみの成分はそれぞれ4成分ずつとなる。式 (16), (25), (26), (31) からわかるように応力4成分を制御することは中空供試体に載荷する4つの外力、すなわち、軸力  $F_v$ 、トルク  $T$ 、外セル圧  $p_o$ 、内セル圧  $p_i$  を制御することにほかならない。また式 (37), (40), (42), (45) からわかるようにひずみの4成分を制御することは中空供試体に関する4つの変形量、すなわち鉛直方向変位  $\Delta H$ 、外径変位  $u_o$ 、内径変位  $u_i$ 、供試体の回転角  $\Delta\theta$  を制御することにほかならない。

## 8.2 機械制御

上述のように中空ねじりせん断試験では、中空円筒供試体における4つの応力成分と4つのひずみ成分のうち、合計で4つの応力またはひずみ成分について条件を与えなければならない。正確な応力およびひずみ制御を行うには、時事刻々と変わる応力とひずみ成分を監視し、条件を満足するように調整する必要がある。これを人間が行うことは、労力や精度の点から見ても現実的ではない。

そこで本研究ではパーソナルコンピュータを用いた自動計測と自動制御を行った(図4参照)。用いた自動制御のアルゴリズムにはPDI制御などの高等な技術は用いておらず、試行錯誤によって作ったものであり理論的背景はない。基本的には計測値と目的値の間の誤差がある一定量に達したらその強度を解消するように負荷を修正する仕組みである。このとき、あらかじめ最適なモーター速度などを調べておき、その速度を用いたon-off制御およびP制御(比例制御)で十分な精度が得られた。

なお、本研究では静ひずみ計測器で測定するなど比較的ゆっくりとした静的な現象を対象としており複雑な制御理論は必要なかったが、高度な制御理論の使用により、動的な現象の再現も可能であると考えられる。このようなシステムが地盤工学の多くの実験分野に導入されれば、実験技術は大きく進歩するものと期待される。

## 8.3 $\alpha$ , $b$ , $p'$ 一定条件でのねじりせん断試験

### 8.3.1 概要

最大主応力  $\sigma_1$  が鉛直方向となす角度  $\alpha$ 、中間主応力係数  $b$  および平均主応力  $p$ 、偏差応力  $q$  は式(49)、(50)および次式(68)、(69)で表される。

$$p = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \quad (68)$$

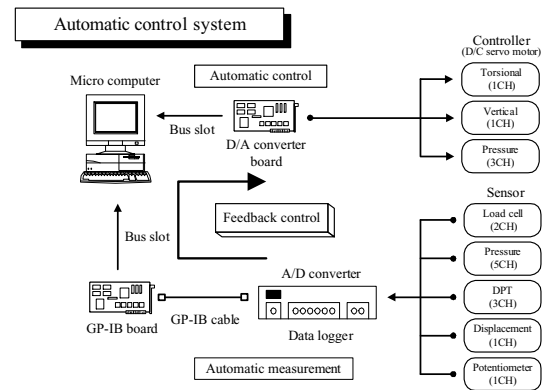


図4: 機械制御システム

$$q = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \quad (69)$$

供試体にかかる応力成分は4つであるが、条件式は3つである。よって、もう1つの条件式としてねじり力または鉛直力載荷をひずみ制御として  $\sigma_{z\theta}$  または  $\sigma_z$  を観測値として与えることとする。そこで直接制御できる  $p_o$ ,  $p_i$ ,  $\sigma_{z\theta}$ ,  $\sigma_z$  に関する条件式を求める<sup>1</sup>。

### 8.3.2 $\alpha \neq 0^\circ$ かつ $\alpha \neq 90^\circ$ の場合の条件

一定せん断ひずみ速度で  $\sigma_{z\theta}$  を載荷する方法を適用する<sup>2</sup>。

式(49)、(50)、(68)を整理すると、以下の関係式が得られる。

$$p_o = p + \left( -\frac{2}{3}A + B \frac{r_o + 3r_i}{6r_o} \right) \sigma_{z\theta} \quad (70)$$

$$p_i = p + \left( -\frac{2}{3}A + B \frac{3r_o + r_i}{6r_i} \right) \sigma_{z\theta} \quad (71)$$

<sup>1</sup> $\sigma_z$  は  $p_o$  と  $p_i$  にも影響されるため厳密には直接制御できないが、与えるべき  $p_o$  と  $p_i$  で  $\sigma_z$  を計算し、過不足を鉛直ひずみ制御で調整することとする。

<sup>2</sup> $\alpha$  が正のときは正のせん断ひずみで、 $\alpha$  が負のときは負のせん断ひずみとなるようにする。

$$\sigma_z = p + \left( \frac{4}{3}A - \frac{1}{3}B \right) \sigma_{z\theta} \quad (72)$$

ここに、 $\alpha, b$  が一定のとき、 $A, B$  は定数となり次式のように表される。

$$A = \frac{1}{\tan 2\alpha} \quad (73)$$

$$B = (2b-1) \sqrt{1 + A^2 \frac{|\sigma_{z\theta}|}{\sigma_{z\theta}}} + A$$

$$= \frac{b - \sin^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} \quad (74)$$

したがって、 $\sigma_{z\theta}$  を観測値とし、式(70)～(72)が満たされるように制御する。

いま、 $p_o = p_i$  なる条件を考えると  $b = \sin^2 \alpha$  を得る。これは、 $\alpha$  と  $b$  を独立に制御したければ、 $p_o$  と  $p_i$  を別々に制御するしなければいけないということである。

### 8.3.3 $\alpha = 0^\circ$ の場合の条件

一定鉛直軸ひずみ速度で  $\sigma_z$  を載荷する。

$$p_o = p + \frac{-2 + \frac{r_o + 3r_i}{r_o} b}{2(2-b)} (\sigma_z - p) \quad (75)$$

$$p_i = p + \frac{-2 + \frac{3r_o + r_i}{r_i} b}{2(2-b)} (\sigma_z - p) \quad (76)$$

$$\sigma_{z\theta} = 0 \quad (77)$$

したがって、 $\sigma_z$  を観測値とし、式(75)～(77)が満たされるように制御する。

いま、 $p_o = p_i$  なる条件を考えると  $b = 0$  を得る。これは、通常の三軸圧縮試験と同じ条件である。

### 8.3.4 $\alpha = 90^\circ$ の場合の条件

一定鉛直軸ひずみ速度で  $\sigma_z$  を除荷する。

$$p_o = p + \frac{-2 + \frac{r_o + 3r_i}{r_o} (1-b)}{2(1-b)} (\sigma_z - p) \quad (78)$$

$$p_i = p + \frac{-2 + \frac{3r_o + r_i}{r_i} (1-b)}{2(1-b)} (\sigma_z - p) \quad (79)$$

$$\sigma_{z\theta} = 0 \quad (80)$$

したがって、 $\sigma_z$  を観測値とし、式(78)～(80)が満たされるように制御する。

いま、 $p_o = p_i$  なる条件を考えると  $b = 1$  を得る。これは、通常の三軸伸張試験と同じ条件である。

### 8.3.5 制御例

図5に  $\alpha, b, p'$  一定条件の制御例を示す。等方圧 ( $p' = 100 \text{ kPa}$ ) からの制御であるため、載荷初期は、 $\alpha, b$  の値が大きくばらついているが、時間がたつと ( $q$  が大きくなると) 安定してきている。上記の方法で問題なく制御できていることがわかる。

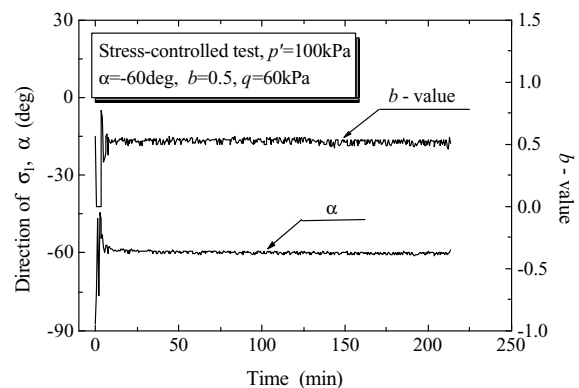


図5:  $\alpha, b, p'$  一定の制御状況

このような制御を使った研究例として、参考文献[1]を紹介しておく。興味ある方は参照していただきたい。

## 8.4 交通荷重の再現

図6のように、地表面に幅  $2a$  の帯状荷重がある場合を考えてみよう。地盤を半無限弾性体と考えると、次のような応力状態が得られる。



$$\sigma_v = \frac{p}{\pi} (\theta_0 + \sin \theta_0 \cos(\theta_1 + \theta_2)) \quad (81)$$

$$\sigma_h = \frac{p}{\pi} (\theta_0 - \sin \theta_0 \cos(\theta_1 + \theta_2)) \quad (82)$$

$$\tau_{vh} = \frac{p}{\pi} \sin \theta_0 \sin(\theta_1 + \theta_2) \quad (83)$$

$$\theta_0 = \theta_1 - \theta_2 \quad (84)$$

これを変換して、主応力は次式のようになる。

$$\sigma_1 = \frac{p}{\pi} (\theta_0 + \sin \theta_0) \quad (85)$$

$$\sigma_3 = \frac{p}{\pi} (\theta_0 - \sin \theta_0) \quad (86)$$

また、最大主応力  $\sigma_1$  が鉛直方向となす角度  $\alpha$  は

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tau_{vh}}{\sigma_z + \sigma_h} = \tan(\theta_1 + \theta_2) \quad (87)$$

となる。

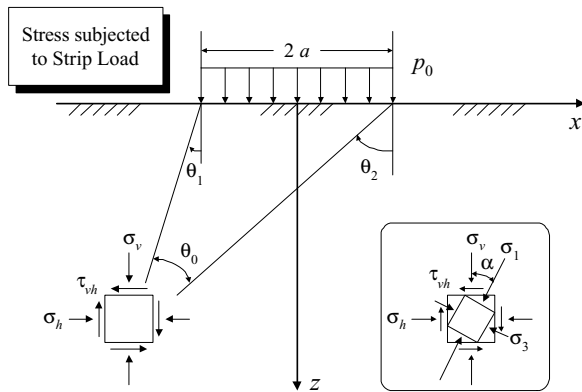


図 6: 帯状荷重による地盤内応力

図 7 にそれぞれの応力成分の場所での変化を示す。この場合は、3つの独立な応力 ( $\sigma_v$ ,  $\sigma_h$ ,  $\tau_{vh}$ ), を制御するわけである。図 8 には、せん断力面 ( $\tau_{vh} - \sigma_v - \sigma_h$ ) での軌跡 (計算値) と実験値を示す。実験値はほぼ計算値と一致しており、まずまずの精度で制御できているようである。

図 9 に交通荷重と三軸圧縮荷重 (鉛直方向のみの荷重) で起こる鉛直ひずみを示す。両載荷方法にお

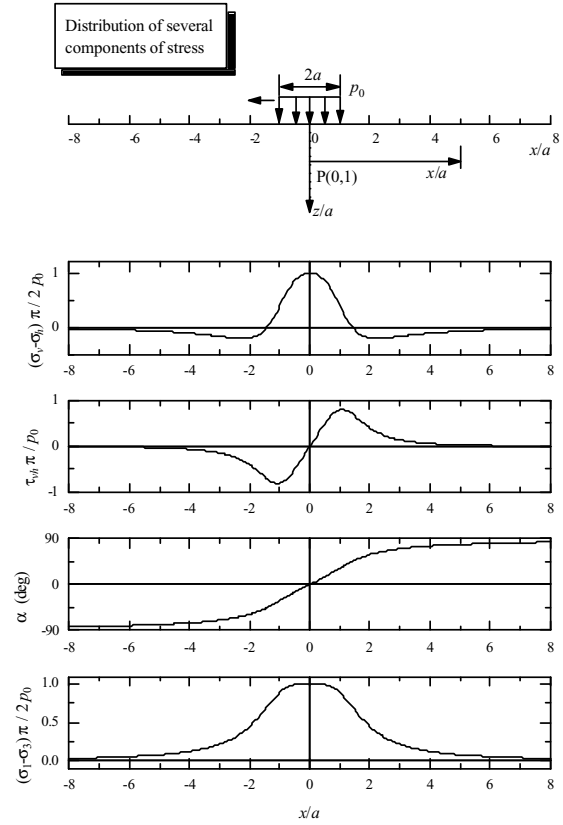


図 7: 帯状荷重により生じる応力成分

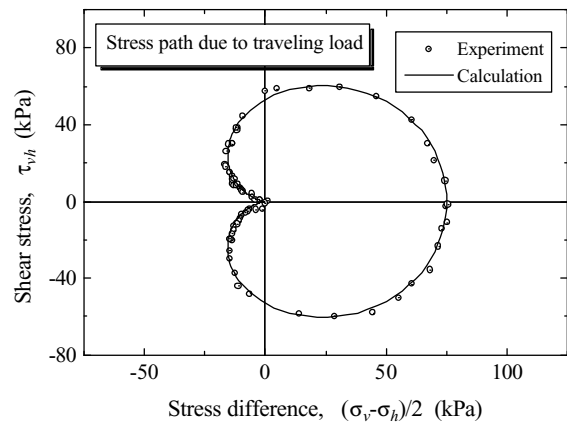


図 8: 帯状荷重による地盤内応力制御状況

いて、 $\tau_A$  が等しくなるようにしてある。試料は湿潤状態の米山粘性土を締固めて作製した。この図より、鉛直ひずみははじめの 20 サイクルまで大きく進展し、その後、鉛直ひずみはあまり大きくなりず、弾性的な変形を繰り返しているようである。三軸圧縮荷重より、交通荷重において大きな鉛直ひずみが起こっており、地盤の沈下量予想では、正確に応力状態を再現する必要があるといえる。

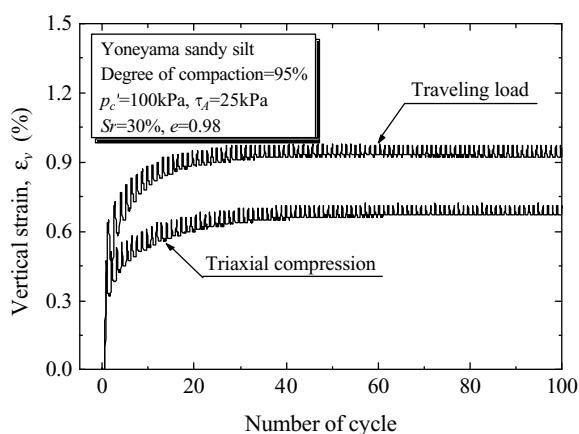


図 9: 繰返し荷重が鉛直ひずみにおよぼす影響

## 参考文献

- [1] H. Toyota, N. Sakai and K. Nakamura. “Mechanical Properties of Saturated Cohesive Soil with Shear History Under Three Dimensional Stress Conditions”, *Soils and Foundations*, Vol. 41, No. 6, pp. 97–110, 2001.

## 謝辞

これは、中空ねじりせん断試験を行うに当たっての応力とひずみの算定方法や自動制御例をまとめたものである。実際の測定値に応じた取り扱い方法の詳細は示していないが、中空ねじり試験の概念は十分に理解していただけたと思う。掲載した実験データは、長岡技術科学大学地盤研究室において、筆者の研究課題や研究室の実験ゼミで得られたものを抽出したものである。多大な労力を必要とする実験結果は、研究室の学生諸君の協力により得られた。ここに、深く感謝の意を表します。